

Výroková a predikátová logika – úkol z predikátové logiky

Deadline pro odevzdání úkolu je v pondělí 29. prosince 2025. Úkoly odevzdávejte e-mailem na `Martin.Pilat@mff.cuni.cz` (stačí sken/fotka vašeho řešení na papíře).

Za úkol můžete dostat maximálně pět bodů.

1. Necht $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ je struktura v jazyce $L = \langle +, \cdot, 0 \rangle$ s rovností, kde \mathbb{Q} je množina racionálních čísel, “+” je sčítání racionálních čísel, “ \cdot ” je násobení racionálních čísel a “0” je konstanta reprezentovaná číslem 0.
 - (a) Najděte podstrukturu \mathcal{A} generovanou množinou $\{1\}$, tedy $\mathcal{A}\langle 1 \rangle$. (0,5 b)
 - (b) Jsou všechny podstruktury \mathcal{A} navzájem elementárně ekvivalentní? (0,5 b)
2. Necht $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2), \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
 - (a) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle \rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. (0,5b)
 - (b) Jsou teorie T a T' kompletní? Uveďte zdůvodnění. (0,5b)
3. Necht $L(x, y)$ vyjadřuje “*existuje let z x do y* ” a $S(x, y)$ vyjadřuje “*existuje spojení z x do y* ”. Víme, že
 - (a) Z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku se dá letět do Paříže.
 - (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$
 - (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$
 - (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$

Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže (1 bod)

4. Víme, že:
 - (i) Rodiče jsou starší než jejich děti.
 - (ii) “Být rodičem” je asymetrická relace.
 - (iii) “Být starší” je tranzitivní relace.
 - (iv) Tom je otcem Mary, Mary není starší než Bob, Bob je synem Jane.

Ukažte rezolucí, že pak:

- (v) Tom je starší než Bob nebo Mary není matkou Jane.

Konkrétně:

- (a) Tvrzení (i) až (v) vyjádřete otevřenými formullemi φ_1 až φ_5 jazyka $L = \langle R, S, t, m, b, j \rangle$ bez rovnosti, kde R, S jsou binární relační symboly, $R(x, y)$, $S(x, y)$ značí (respektive), že “ x je rodičem y ”, “ x je starší než y ”, a t, m, b, j jsou konstantní symboly označující Toma/Mary/Boba/Jane. (0,5 b)
- (b) Převodem na CNF nalezněte otevřenou teorii S v množinové reprezentaci, která je nespílitelná, právě když v teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ platí φ_5 . (0,5 b)
- (c) Rezolucí dokažte, že S není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. (1 b)